О производной.

Начиная разговор о производной, я допускаю, что читателю известно, что такое функция, что он не путает таких два понятия, как функция и график функции, что он также знает, что такое область определения функции и множество значений функции.

Итак, если человеку, знакомому с элементарными понятиями о функции, показать приведенный на рисунке график, и спросить его, в какой области функция растет быстрее, то, недолго размышляя, человек ткнет пальцем в правую часть рисунка. На вопрос, почему он так считает, ответит просто: потому, что в правой части графика кривая круче. И будет совершенно прав.

А спросишь, что такое производная, и он будет мучительно вспоминать, путая последовательность слова, про какой-то предел отношения приращения чего-то к чему-то, не понимая смысла произносимого. А ведь на самом деле понятие производно намного проще, чем оно кажется.

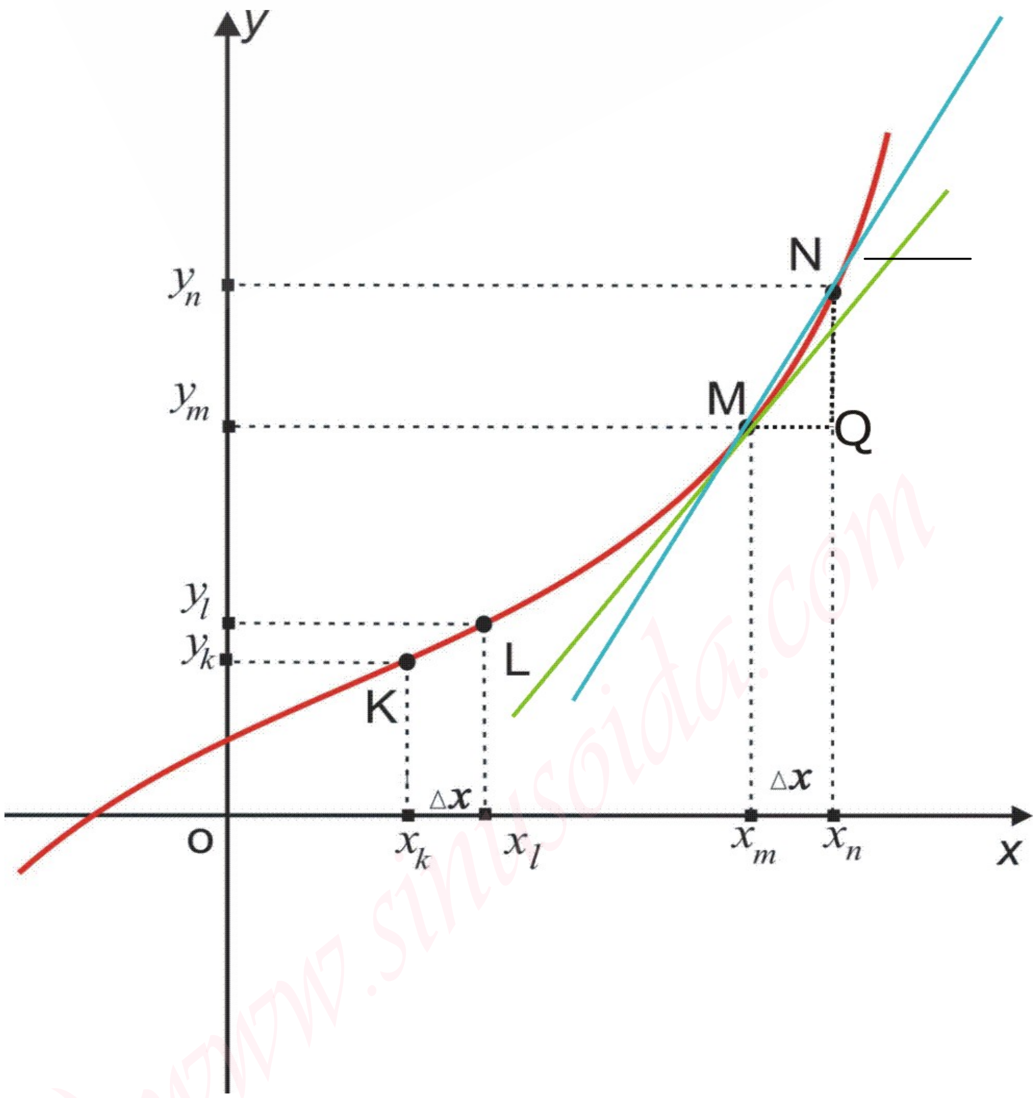

рис. 1

Попробуем перейти теперь на язык алгебры.

Имеем точгу $\boldsymbol{K}$ на графике с координатами $(x_k;y_k)$. Если мы к абсциссе x_k точки $\boldsymbol{K}$ прибавим величину Δx, то получим точку $\boldsymbol{L}$ с координатами $(x_k;y_l)$.

Обратимся теперь к правой части графика. Рассмотрев точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$, абсциссы которых x_m и x_n отстоят друг от друга **на такую же величину** Δx, как и x_k и x_l, мы видим, что соответствующие им значения функции y_m и y_n отстоят друг от друга дальше, чем y_k и y_l.

Таким образом мы можем сказать, что приращение функции в точке y_k, которое равно

$y_k - y_l$,

больше, чем приращение функции в точке y_m, которое, в свою очередь, равно

$y_m - y_n$.

Теперь мы можем записать, что

$$\frac{y_l - y_k}{x_l - x_k} < \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m}$$

В выражениях

$$\frac{y_l - y_k}{x_l - x_k} \quad \text{и} \quad \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m}$$

числитель - приращение функции, а знаменатель – приращение аргумента, а вся дробь есть отношение приращения функции к приращению аргумента, и для краткости можно записать, что

$$\frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

Если мы теперь рассмотрим треугольник MNQ, то увидим, что

$$\Delta x = MQ, \text{ а } \Delta y = NQ$$

И отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть ни что иное, как тангенс угла $\boldsymbol{MNQ}$.

Представим теперь, что приращение аргумента Δx уменьшается, и точка $\boldsymbol{N}$ приближается к точке $\boldsymbol{M}$. В таком случае прямая $\boldsymbol{MN}$ будет стремиться к касательной к графику функции в точке $\boldsymbol{M}$.

Отношение приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в пределе, когда приращение аргумента стремиться к нулю, называют производной функции в точке x_m и обозначают $f'(x_m)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

и численное значение производной в этой точке будет равно тангенсу угла наклона касательной в точке $\boldsymbol{M}$.

Таким образом, с геометрическим смыслом производной все понятно – это тангенс угла наклона касательной, и, иными словами, показатель того. Как быстро растет функция. Но для понимания сути надо уяснить и физический смысл этого понятия.

Пусть вдоль некоторой прямой *Ох* движется точка, и координаты этой точки меняются со временем так, как показано на графике. Если примем за одну клетку время, равное одной секунде, то видно, что первые две секунды точка двигалась медленно, потом быстрее, а под конец снова замедлила свое движение. То, что скорость есть отношение пути ко времени, за который этот путь пройден, нам известно. Значит, скорость на участке ***BC*** равна отношению длины этого участка ***Δx*** к промежутку времени ***Δt.***

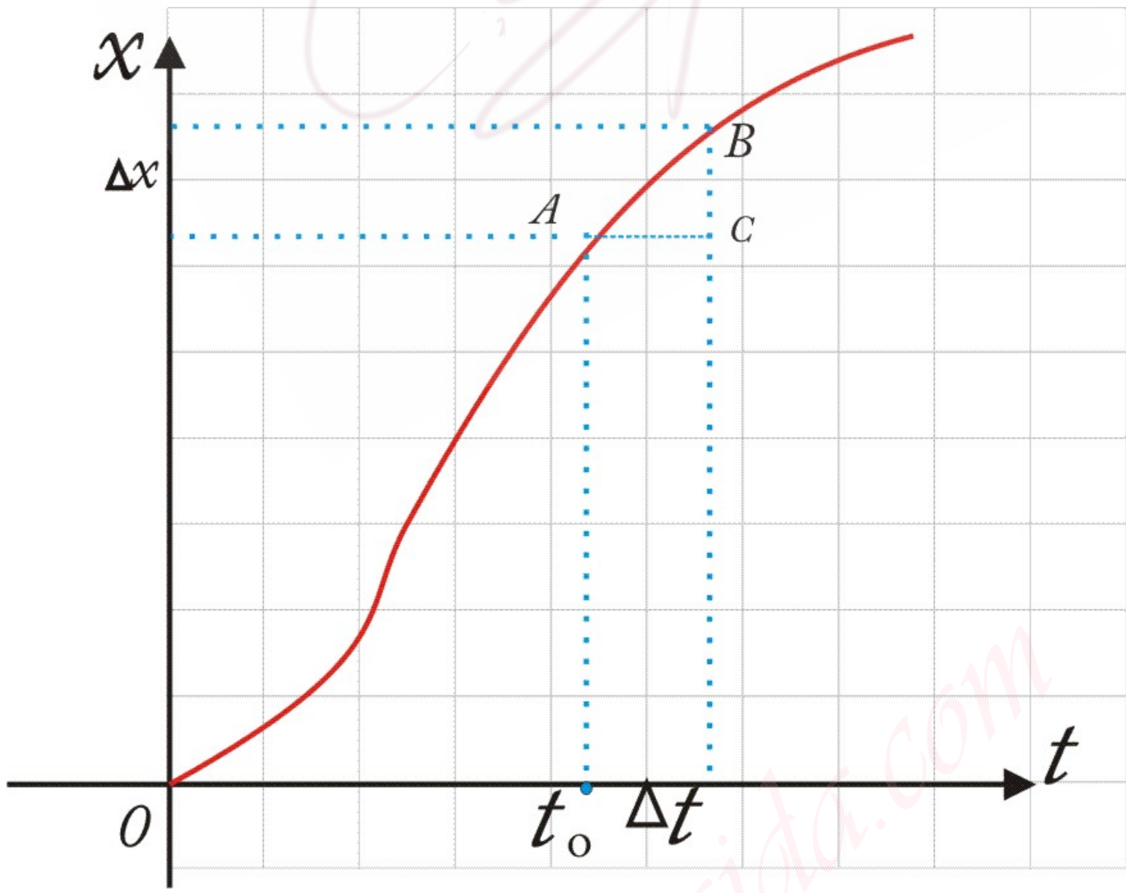

рис.2

Но, если приглядеться, то видно, что и на этом довольно коротком отрезке скорость точки неравномерна, и в каждый момент времени она меняется. И отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ – это средняя скорость точки на отрезке ВС. А для того, чтобы определить скорость точки в момент времени t_0 мы введем понятие ***мгновенной скорости***, как предел средней скорости за промежуток времени Δt, когда Δt стремится к нулю.

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Но $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$ - это производная координаты x по времени t. Значит, численное значение мгновенной скорости равно производной координаты по времени.

Теперь, когда можно считать, что геометрический и физический смысл производной уяснен, обратимся к конкретным функциям.

Например, $f(x)= x^2$

Что считать приращением функции? Очевидно, разность между значением функции в точке $x+\Delta x$ и значением функции в точке x.

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

В нашем случае

$$\Delta f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2$$

Раскрыв скобки, получим

$$\Delta f(x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x$$

Таким образом, производная функции $f(x)= x^2$ есть $2x$.

Аналогично, легко показать, что производная если $f(x)= x^3$ то $f'(x)=3x^2$

И для любой степенной функции вида

$$f(x) = x^n$$

производная будет определяться формулой

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Эта формула справедлива также для любых дробных или отрицательных показателей степени. Так, например, если

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}},}$$

то $\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}$

Заметим,, что, если у нас функция - величина постоянная, то ее производная должна быть равна нулю, и это очевидно – ведь приращение функции равно нулю. А также, если мы умножаем функцию на постоянную величину, то и производная будет умножена на эту же величину.

Прежде чем рассматривать производные других функций, обратимся к простому примеру:

Допустим, тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 =40 м/с.

Известно, что его высота меняется со временем по формуле

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

где $g \approx 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения.

Так как скорость - это производная его координаты h по времени, то в каждый момент скорость тела определится по формуле:

$$\boldsymbol{v(t) = h'(t) = v_o - gt}$$

что следует из самого определения равноускоренного движения.

Возникает вопрос, а на какую максимальную величину поднимется брошенное тело? Или, иными словами, чему равно максимальное значение функции $h(t)$?

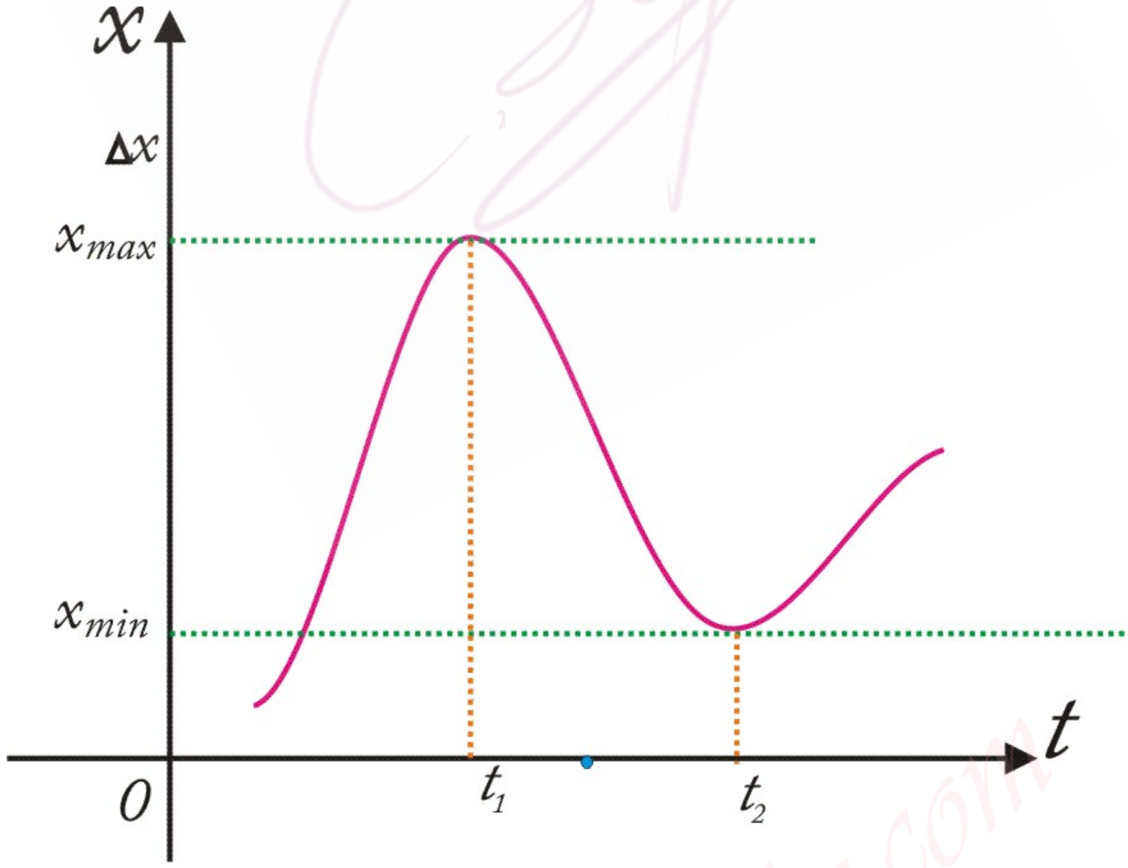

рис.3

Обратим внимание на рисунок 3. В максимальном или в минимальном значении функции касательная к графику параллельна оси абсцисс, то есть тангенс угла ее наклона равен нулю. Значит, и производная функции в этих точках должна быть равна нулю.

$$h'(t) = v_0 - gt = 0$$

Это произойдет в момент времени $t = \frac{v_0}{g}$

В нашем случае $t = \frac{40\ \text{м/с}}{10\ \text{м/с}^2} = 4\ c$

И, зная значение $\boldsymbol{t}$, легко найти и максимальное значение высоты:

$$h_{max} = 40 \cdot 4 - \frac{10 \cdot 4^2}{2} = 80\ (\text{м})$$

Вот мы и подошли к важному значению понятия производной: с ее помощью можно вычислить максимальные и минимальные (экстремальные) значения функций. Простой пример: мы имеем сеточное ограждение длиной 100 метров. Какова может быть максимальная площадь прямоугольного участка, который мы огородим этой сеткой?

Если длина сетки 100 метров, значит периметр нашего участка – 100 метров, и сумма сторон a и b прямоугольника равна 50 метрам

Итак ***a+b* = 50**, или ***b=50-a***

Площадь прямоугольника $S = a \cdot b = a \cdot (50 - a) = 50a - a^2$

Таким образом, площадь прямоугольника есть функция его стороны a:

$$S(a) = 50a - a^2$$

Производная нашей функции будет равна:

$$S'(a) = 50 - 2a$$

Откуда видно, что при $\boldsymbol{a = 25}$ производная равна нулю,

Значит, ***b=25*** и максимальную площадь будет иметь квадратный участок со сторонами, равными 25 метров и площадью, соответственно, 625 квадратных метров.

Тут необходимо заметить, что если в точке максимума или минимума функции производная равна нулю, вовсе не следует обратное: равенство производной нулю не означает, что функция достигла экстремального значения. На примере простой функции $\boldsymbol{y = x^3}$(рис.4), производная которой $\boldsymbol{y' = 3x^2}$**,** видно, что при ***x=0*** производная обращается в нуль, но функция как была возрастающей как значениях ***x*** меньше нуля, так и осталась возрастающей при ***x>0.***

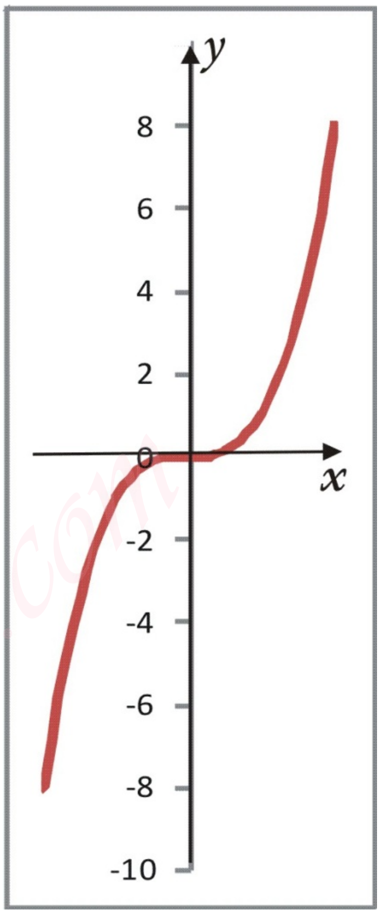

рис.4

До сих пор мы ни разу не задались вопросом, а всегда ли функция имеет производную, или, как принято говорить, всегда ли функция дифференцируема? Говоря не очень строго, дифференцируемость функции в данной точке означает возможность заменить график этой функции в окрестности данной точке отрезком прямой. Если же график имеет разрыв или излом, то производную в точке разрыва или излома определить невозможно. Например, невозможно найти производную функции $\mathrm{y} = \boldsymbol{\frac{1}{x}}$ в точке ***x=0***. Или, например, производную функции $\boldsymbol{y = |x - 3|}$ при ***x=3.***

Суммируя изложенное. Мы можем сказать, что с помощью производной можно определить точки максимума или минимума функции, и, кроме того, понять, возрастает или убывает функция на данном интервале: если производная функции на данном интервале положительная – то функция возрастает (тангенс угла наклона касательной положителен), а если производная отрицательна – функция убывает.

Несколько простых сведений о дифференцируемости функций:

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 то в этой же точке дифференцируемы сумма, произведение и частное (если $g(x_0)\neq 0$) этих функций, при этом

:

1. Постоянный множитель С можно выносить из-под знака производной $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

2. Производная суммы двух функций равна сумме их производных:

   $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

3. Производная произведения двух функций равна:

   $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

4. $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$$

Производные тригонометрических функций

Производную тригонометрических функций легко определить из физических соображений:

Пусть по окружности единичного радиуса (рис.5) с единичной угловой скоростью движется точка, и пусть в начальный момент времени она находилась в положении A_0, а в момент времен t – в положении A_t.

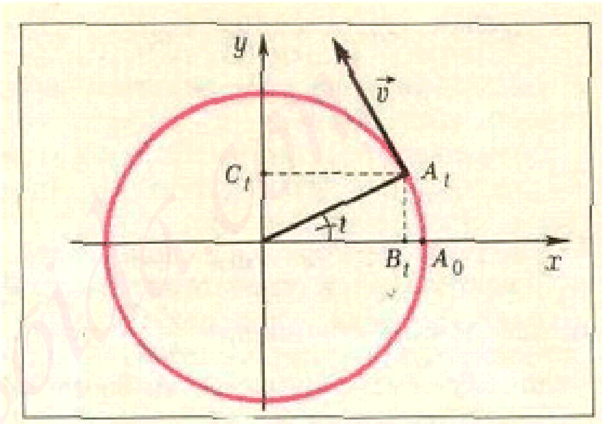

рис.5

Дуга A_0A_1 имеет длину t (так как скорость точки равна единице), то есть центральный угол A_0OA_t содержит t радиан. По определениям синуса и косинуса ордината точки A_t равна $\cos t$. Значит, проекция B_t точки A_t на ось абсцисс движется по закону $x = \cos t$, а проекция C_t точки A_t на ось ординат - по закону $y = \sin t$

Найдем скорости этих движений. Заметим, что линейная скорость точки A_t , как и угловая, равна 1. Разложим линейную скорость на две составляющие – горизонтальную и вертикальную. Вектор $\vec{v}$ скорости точки A_t имеет длину, равную единице и направлн по касательной к окружности, проведенной в точке $\boldsymbol{A_{t.}}$, и потому образует с осью $\boldsymbol{Ox}$ угол $t+\frac{\pi}{2}$, а с осью $\boldsymbol{Oy}$ - угол $\boldsymbol{t}$. Следовательно, проекция вектора $\vec{v}$ на ось $\boldsymbol{Ox}$ (то есть скорость движения точки $\boldsymbol{B_t}$) равна

$$v_x = \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t,$$

А его проекция на ось $\boldsymbol{Oy}$ (то есть скорость движения точки $\boldsymbol{C_t}$) равна

$$v_y = \cos t$$

Так как скорость есть производная пути по времени, то, учитывая, что закон движения точки $\boldsymbol{B_t}$: $x=\cos t$, а скорость $v_x = -\sin t$, получаем, что

$$(\cos t)' = -\sin t.$$

Для точки $\boldsymbol{C_t}$: $y=\sin t$, а скорость $v_y = \cos t$, откуда делаем вывод, что

$$(\sin t)' = \cos t$$

Производная сложной функции

Допустим, мы имеем функцию $\boldsymbol{f(x) = sin^2\, x.}$

Функцию такого типа принято называть сложной функцией, потому что мы сначала проводим одно преобразование – переменной $\boldsymbol{x}$ ставим в соответствие величину $\boldsymbol{sin\, x}$, а затем полученное значение $\boldsymbol{sin\, x}$ возводим в квадрат.

Мы можем записать, что $\boldsymbol{f(x) = g(h(x))}$, где $\boldsymbol{g(h)=h^2}$, а $\boldsymbol{h(x)=sin\, x}$

Производная такой функции находится по простому правилу:

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(h)\cdot h'(x)}$$

В нашем случае $\boldsymbol{(sin^2\, x)' = 2\, sin\, x\, cos\, x = sin\, 2x}$

Пример практической задачи на применении производной

Дан бак без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат и объем равен 108 см^3. При каких размерах бака на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?

Решение:

Обозначим сторону основания через х см, тогда высота параллелепипеда будет.$\boldsymbol{\frac{108}{x^2}}$

Пусть S(x) площадь поверхности, тогда $\boldsymbol{S(x) = 4\cdot\frac{108}{x} + x^2 = \frac{432}{x} + x^2}$

Итак, площадь поверхности $\boldsymbol{S}$ есть функция стороны основания $\boldsymbol{x}$.

Тогда производная $\boldsymbol{S'(x)}$ будет равна:

$$\boldsymbol{S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}}$$

Приравняв производную нулю, получим:

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0$$

$2x^3 = 432$; $x^3 = 216$; $x = 6$;

По условию задачи $x \in (0, +\infty)$

Найдем знак производной на промежутке (0;6) и на промежутке (6; $+\infty$). Производная меняет знак с "-" на "+". Отсюда $x=6$ точка минимума, следовательно, ***S(6)=108 см²*** наименьшее значение. Значит, сторона основания равна 6 см, высота 12см.

Таблица производных наиболее часто встречающихся функций:

Функция y = f(x)	***Производные***
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
$y = x$	$y'=1$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y = \cos x$	$y'=-\sin x$
$y = \sin x$	$y'=\cos x$
$y = tg\, x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctg\, x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y'=\frac{1}{x}$

С.Э. Зарифян