Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Демонстрационный вариант

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 3 часа (180 минут). В работе 25 заданий. Они расположены по нарастанию трудности и распределены на 3 части.

Часть 1 содержит 13 более простых заданий по материалу курса "Алгебры и начал анализа". К каждому из них даны 4 варианта ответа, из которых только один верный.

Часть 2 содержит 9 более сложных заданий по материалу курса «Алгебры и начал анализа» 10-11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии девятилетней и средней школы. При их выполнении требуется записать только полученный ответ.

Часть 3 содержит 3 наиболее сложных задания, при выполнении которых требуется записать полное решение.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удается выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у вас останется время, то можно вернуться к пропущенным заданиям.

Для получения отметки "3" достаточно выполнить верно любые 7 заданий из всей работы.

Для получения отметки "4" достаточно выполнить определенное число заданий из Частей 1 и 2.

Для получения отметки "5" необходимо выполнять задания из Частей 1,2 и 3, при этом не требуется решить все задания работы, но среди верно выполненных Вами заданий должно быть хотя бы одно из Части 3.

За верное выполнение различных по сложности заданий дается один или более баллов. Сумма баллов, полученная Вами за все выполненные задания, выставляется в сертификат, который может быть использован при поступлении в вуз. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать как можно большее количество баллов.

Приступайте к выполнению работы.

Желаем успеха!

Часть 1

При выполнении заданий этой части укажите в бланке ответов цифру, которая обозначает выбранный Вами ответ, поставив знак « x » в соответствующей клеточке бланка для каждого задания (А1-А13).

А1. Упростите выражение $\dfrac{5^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{225}}$.

1) $5^{\frac{11}{12}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}$ 2) $5^{\frac{1}{12}} \cdot 3$ 3) $5^{-\frac{5}{12}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}$ 4) $5^{\frac{5}{12}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$

А2. Найдите значение выражения $\dfrac{x-y}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} + y^{\frac{1}{3}}$, если x = 27, y = 25.

1) $3-5^{\frac{1}{3}}$ 2) 3 3) 9 4) $3+5^{\frac{2}{3}}$

А3. Вычислите: $\log_2 0{,}04 + 2\log_2 5$.

1) 0 2) 3 3) – 1 4) $\log_2 5$

А4. Упростите выражение $\sin\alpha \sin 2\alpha + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos\alpha \cos 2\alpha$.

1) 0 2) $2\cos\alpha$ 3) $\cos\alpha + \sin\alpha$ 4) $\cos\alpha - \sin\alpha$

А5. Укажите промежуток которому принадлежит корень уравнения

$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{0{,}5x-1} = 4$.

1) $[-3; -1)$ 2) $[-1; 1)$ 3) $[1; 3)$ 4) $[3; 5)$

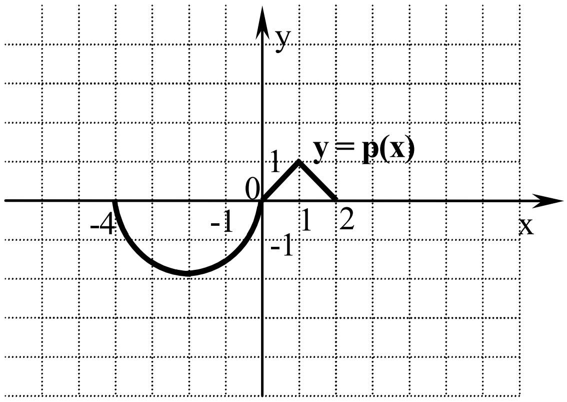
А6. Решите неравенство $\log_{0{,}5}(2 - 0{,}5x) \geq -1$.

1) $[0; 4)$ 2) $(-\infty; 0]$ 3) $(4; +\infty)$ 4) $(4; 6]$

А7. Найдите область определения функции $y = \sqrt{5^{2x-3} - 1}$.

1) $(1{,}5; +\infty)$ 2) $[2; +\infty)$ 3) $[1{,}5; +\infty)$ 4) $[5; +\infty)$

А8. Функция $y = p(x)$ задана графиком на отрезке $[-4; 2]$. Найдите область ее значений.



1) $[-4; 2]$

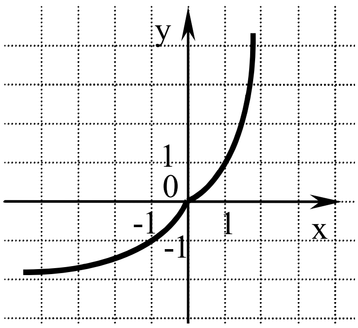
2) $[-2; 0]$

3) $[-2; 4]$

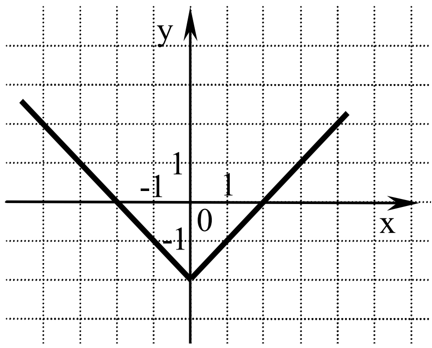
4) $[-2; 1]$

А9. Укажите график нечетной функции.

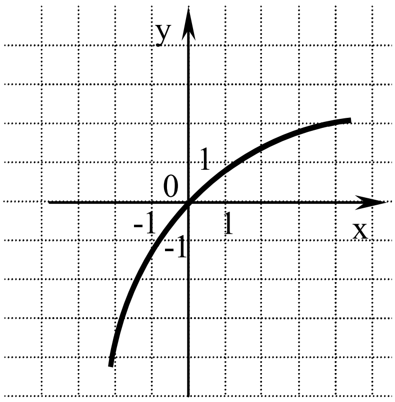
1)



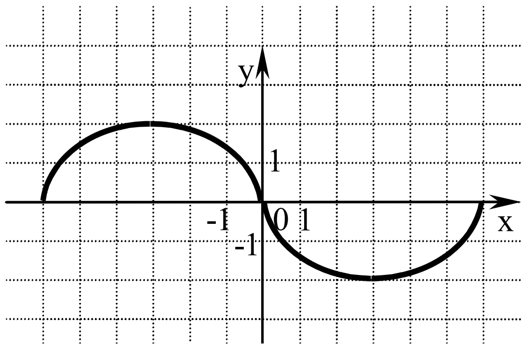
2)



3)

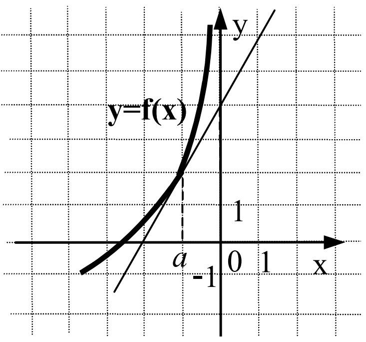


4)

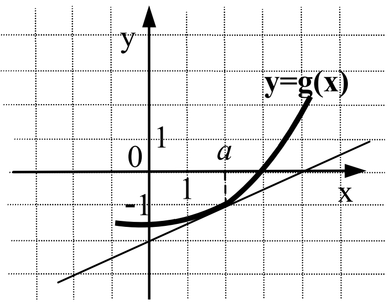


А10. На рисунках изображены графики функций и касательные к ним в точке a. Укажите функцию, производная которой в точке a равна 1.

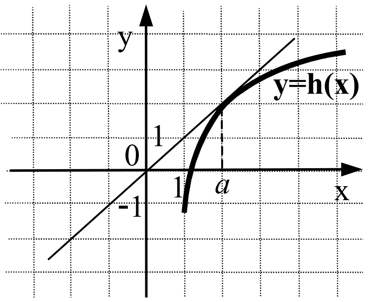
1)



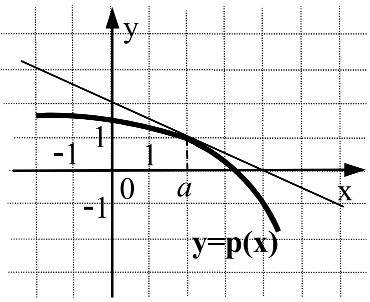
2)



3)



4)



A11. Найдите значение производной функции $y = \dfrac{x - 18}{x}$ в точке $x_0 = -3$.

1) 2 2) 0 3) -2 4) -3

A12. Укажите первообразную функции $f(x) = 2 - \sin x$.

1) $F(x) = 2x - \cos x$

2) $F(x) = x^2 + \cos x$

3) $F(x) = 2x + \cos x$

4) $F(x) = 2 + \cos x$

A13. Найдите корень уравнения $\sin 2x - 4\cos x = 0$, принадлежащий отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

1) $\dfrac{7\pi}{3}$ 2) $\dfrac{5\pi}{2}$ 3) $\dfrac{9\pi}{4}$ 4) $\dfrac{13\pi}{6}$

Часть 2

Ответом на каждое задание этой части будет некоторое число. Это число надо записать в бланк ответов рядом с номером задания (В1-В9), начиная с первой клеточки. Каждую цифру пишите в отдельной клеточке. Единицы измерений писать не нужно. Если ответ получился в виде дроби, то ее надо округлить до ближайшего целого числа.

В1. Найдите минимум функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4$.

В2. Вычислите площадь фигуры, расположенной в первой координатной четверти и ограниченной линиями $y = 2\sqrt[3]{x}$, $y = x$.

В3. Сколько решений имеет уравнение $(\cos^2 x - \sin^2 x)\sqrt{1-x^2} = 0$?

В4. При каком наименьшем значении параметра a функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax$ возрастает на всей числовой прямой?

В5. Пусть $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} 2^{x-2} - y = 0, \\ |x-4| - y = 1. \end{cases}$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

В6. Найдите значение выражения $2\sqrt{5}\operatorname{ctg}(\arcsin\frac{2}{3})$.

В7. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(4 - x^2)$

В8. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2м и 5м.

В9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 6$ м, $BC = 8$ м, $BB_1 = 1{,}6\sqrt{91}$ м. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA_1.

Часть 3

Для ответов на задания этой части используйте специальный бланк. Запишите сначала номер задания (С1 и т.д.), а затем запишите полное решение.

С1. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции

$$f(x) = 16\log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

С2. Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2.

С3. При каком $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$ значение выражения

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right) : \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} - 2\right)\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$

ближе всего к 73?

Инструкция по проверке и оценке работ учащихся по математике

В экзаменационной работе используются три типа заданий. Задание Части 1 (с выбором ответа) считается выполненным верно, если в «Бланке ответов» отмечена цифра, которой обозначен верный ответ. Верный ответ в заданиях Части 2 (с кратким ответом) – некоторое число. Такое задание считается выполненным верно, если в «Бланке ответов» записано именно это число. Проверка выполнения этих двух типов заданий осуществляется с помощью компьютера. За каждое верно выполненное задание выставляется 1 балл.

Приведем перечень ответов к заданиям Частей 1 и 2 демонстрационного варианта.

Часть 1

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13
Номер ответа	**3**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**3**	**4**	**4**	**3**	**1**	**3**	**2**

Часть 2

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9

Верный ответ	**0**	**2**	**4**	**1**	**2**	**5**	**– 1**	**24**	**80**

Часть 3

Выполнение заданий Части 3 (с развернутым ответом) оценивается экспертной комиссией. На основе критериев, представленных в приведенной ниже таблице, за выполнение каждого задания выставляется от 0 до 4 баллов.

Оценка в баллах	Критерии оценки выполнения заданий с развернутыми ответами.
4	Приведена верная, логически правильная последовательность шагов решения. Имеются верные обоснования всех ключевых моментов решения. Необходимые для решения чертежи, рисунки, схемы выполнены безошибочно. Правильно выполнены все преобразования и вычисления, получен верный ответ.
3	Приведена верная, логически правильная последовательность шагов решения. Имеются верные обоснования всех ключевых моментов решения. Необходимые для решения чертежи, рисунки, схемы выполнены безошибочно. Возможны 1-2 негрубые ошибки или описки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. При этом возможен неверный ответ.
2	Приведена верная, логически правильная последовательность шагов решения. Обоснованы только некоторые ключевые моменты решения. Возможны негрубые ошибки в чертежах, рисунках, схемах, приведенных в решении. Возможны 1-2 негрубые ошибки или описки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. При этом возможен неверный ответ.
1	При верной последовательности хода решения отсутствуют некоторые этапы решения. Большинство ключевых моментов решения не обосновано. Возможны ошибки в чертежах, рисунках, схемах, приведенных в решении. Возможны 1-2 негрубые ошибки или описки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. При этом возможен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

Приведем варианты развернутых ответов к заданиям Части 3.

C1. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции

$$\mathbf{f(x)} = 16\log_{\frac{1}{16}}\frac{\sin x+\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Р е ш е н и е.

Так как sinx + cosx = $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, то множество значений этой суммы есть отрезок $[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,]$. Значит, множество значений числителя дроби – это отрезок $[2\sqrt{2}\,;\,4\sqrt{2}\,]$, а для всей дроби – это отрезок [2;4]. Так как функция $y=\log_{\frac{1}{16}} x$ является монотонно убывающей и непрерывной, то множество значений данной функции – это отрезок $[16\log_{\frac{1}{16}} 4; 16\log_{\frac{1}{16}} 2\,]$. Вычислив значения логарифмов, получаем , что множеством значений функции f(x) является отрезок [– 8; – 4]. Этому отрезку принадлежат ровно пять целых чисел: – 8; – 7; – 6; – 5; – 4.

<u>Ответ: 5.</u>

C2. Найдите наибольшее значение *a*, при котором уравнение $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен – 2.

Р е ш е н и е.

1) Подставим x = – 2 в левую часть уравнения.

$-8 + 20 - 2a + b = 0 \Rightarrow b = 2a - 12.$

2) Так как x = – 2 является корнем, то в левой части уравнения можно вынести общий множитель x + 2. Производим тождественные преобразования, выделяя общий множитель (x + 2),

$$x^3 + 5x^2 + ax + b = x^3 + 2x^2 + 3x^2 + ax + (2a - 12) = x^2(x + 2) + 3x(x + 2) - 6x + ax$$

$$+ (2a - 12) = x^2(x + 2) + 3x(x + 2) + (a - 6)(x + 2) - 2(a - 6) + (2a - 12) =$$

$$= (x^2 + 3x + (a - 6))(x + 2).$$

3) По условию имеется еще два корня уравнения. Значит, дискриминант первого сомножителя положителен.

$D = (-3)^3 - 4(a - 6) = 33 - 4a > 0 \Rightarrow a < 8{,}25.$

4) Подставим $a = 8$ в исходное уравнение

$x^3 + 5x^2 + ax + b = x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^2 + 3x + 2)(x + 2) = (x + 1)(x + 2)^2$

Тогда уравнение имеет только <u>два</u> различных корня. Подставим $a = 7$ в исходное уравнение

$$x^3 + 5x^2 + ax + b = x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = (x^2 + 3x + 1)(x + 2)$$

У первого сомножителя корни различны, так как дискриминант $D = (-3)^2 - 4 = 5 > 0$. Эти корни – иррациональные, так как иррационален $\sqrt{5}$. Значит, у уравнения есть три различных корня.

Ответ: 7.

С3. При каком $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$ значение выражения

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$

ближе всего к 73?

Р е ш е н и е.

После тождественных преобразований данного выражения, учитывая, что x принимает только натуральные значения, получаем

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right) =$$

$$=\frac{(x+2)-x}{\sqrt{x(x+2)}}\cdot\frac{\sqrt{x(x+2)}}{(x+2)-2\sqrt{x(x+2)}+x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} =$$

$$=\frac{(x+2)-x}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})^2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} =$$

$$=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{2}=1+\frac{x+\sqrt{x(x+2)}}{2}.$$

Оценим подкоренное выражение $x(x + 2)$ сверху и снизу.

Так как $x^2 < x(x + 2) < (x + 1)^2$, то

$$1+\frac{x+x}{2} < 1+\frac{x+\sqrt{x(x+2)}}{2} < 1+\frac{x+x+1}{2}$$

Значит, исходное выражение больше, чем $1 + x$ и меньше, чем $1 + x + 0{,}5$. Поэтому, при $x = 72$ значение этого выражения в интервале (73; 73,5).

При $x \geq 73$ все значения этого выражения больше 74, а при $x \leq 71$ все значения меньше 72,5.

Ответ: 72.