«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки

__________ В.А. Болотов
« 03 » ноября 2005 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель Научно-методического совета ФИПИ по математике

__________ Г.Г. Канторович
« 24 » октября 2005 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант КИМ 2006 г.

подготовлен Федеральным государственным научным учреждением
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Директор ФИПИ __________ А.Г. Ершов

ВНИМАНИЕ!

При ознакомлении с Демонстрационным вариантом КИМ – 2006, следует иметь в виду, что задания, включенные в демонстрационный вариант, не отражают всех вопросов содержания, которые будут проверяться с помощью всех вариантов КИМ в 2006 году. Полный перечень вопросов, которые могут контролироваться в КИМ – 2006 приведен в кодификаторе, помещенном на данном сайте.

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить правильное представление о структуре будущих КИМ, числе, форме, уровне сложности заданий базового, повышенного и высокого уровня. Приведенные критерии оценки выполнения заданий с развернутым ответом, включенных в этот вариант, позволят составить правильное представление о требованиях к полноте и правильности записи решения заданий повышенного уровня (C1 и C2) и заданий высокого уровня (C3 – C5).

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки и сдачи ЕГЭ в соответствии с целями, которые они ставят перед собой.

Для правильной распечатки файла демонстрационного варианта КИМ по математике необходимо установить на компьютере программное обеспечение MathType версии не ниже 5.0 (см. Примечание в конце файла).

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант 2006 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из трех частей и содержит 26 заданий.

Часть 1 содержит 13 заданий (А1 – А10 и В1 – В3) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов. К каждому заданию А1 – А10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям В1 – В3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (В4 – В11, С1, С2) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. К заданиям В4 – В11 надо дать краткий ответ, к заданиям С1 и С2 – записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два – алгебраических (С3, С5) и одно – геометрическое (С4). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение четырех заданий (В9, В10, В11, С4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой.

Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов №1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1 Вычислите: $\sqrt[4]{48\cdot 27}$.

1) 36 2) 18 3) 6 4) 12

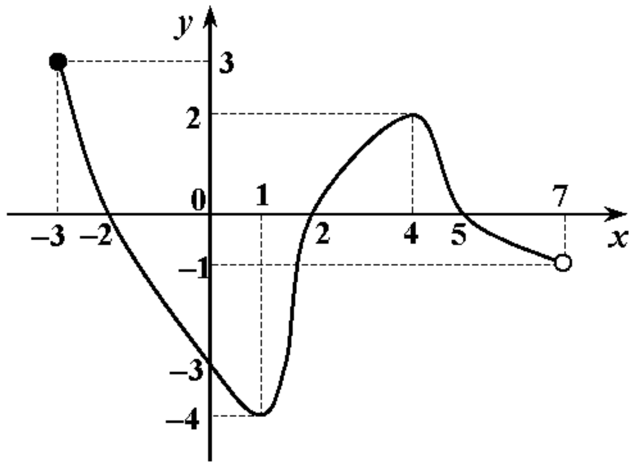
A2 Представьте в виде степени выражение $5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}$.

1) $25^{\frac{8}{9}}$ 2) $5^{\frac{8}{9}}$ 3) 25^{2} 4) 5^{2}

A3 Найдите значение выражения $\frac{1}{2}\cdot 2^{\log_2 10}$.

1) 10 2) 5 3) $\log_2 10$ 4) 20

A4 Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



1) $[-3;\ 7)$
2) $[-3;\ -2]\cup[2;\ 5]$
3) $[-4;\ 3]$
4) $[-4;\ -1)\cup(-1;\ 3]$

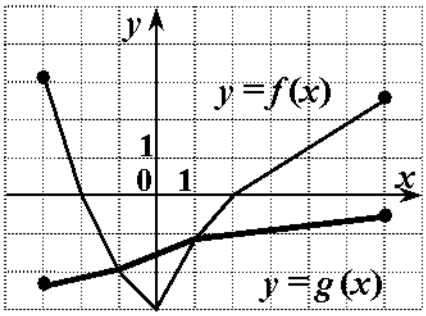
A5 Найдите область определения функции $f(x)=\log_{0,5}\left(2x-x^2\right)$.

1) $(0;\ 2)$
2) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$
3) $[0;\ 2]$
4) $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$

A6 Укажите наибольшее значение функции $y = 1 - \cos 3x$.

1) 1 2) 2 3) 0 4) 4

A7 На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3;\ 6]$. Найдите все значения x, для которых выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$.



1) $[-3;\ -1] \cup [1;\ 6]$
2) $[-1;\ 1]$
3) $[-3;\ -2] \cup [2;\ 6]$
4) $[-2;\ 2]$

A8 Решите уравнение $\sin 3x = \frac{1}{2}$.

1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n,\ n \in Z$

2) $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n,\ n \in Z$

3) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n,\ n \in Z$

4) $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n,\ n \in Z$

A9 Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} > 0{,}04$.

1) $(-\infty;\ 3)$ 2) $\left(-\infty;\ \frac{5}{3}\right)$ 3) $(3;\ +\infty)$ 4) $\left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right)$

A10 Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 5 + 4x - x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) 0 2) 2 3) -2 4) 5

Ответом на задания В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\cos(\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$.

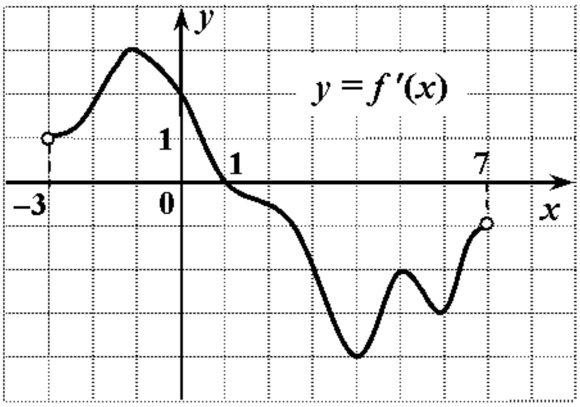
B2 Решите уравнение $\sqrt{2x+37}=x+1$.

B3 Решите уравнение $\log_{1,6}(5x+8)-\log_{1,6}3=\log_{1,6}7$.

ЧАСТЬ 2

B4 Вычислите: $\left(3,4\sqrt[3]{25\sqrt{5}}+1,6\sqrt{5\sqrt[3]{25}}\right)^{-\frac{6}{11}}$.

B5 Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-3;\ 7)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y=f(x)$ принимает наибольшее значение.



B6 Найдите наибольшее значение функции $y=2,7\cdot e^{3x^2-x^3-4}$ на отрезке $[1;3]$.

B7 Решите уравнение $0,2^{x+1}=\sqrt{35+5x}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

B8 Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(2x+1)(x-2)(x-3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

***B9** По пенсионному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года эти проценты капитализируются, т.е. начисленная сумма присоединяется к вкладу. На данный вид вклада был открыт счёт в 50 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

***B10** Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является прямоугольник ABCD, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$. Высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину D_1 и середины ребер AD и CD. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

***B11** Трапеция ABCD вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Решите уравнение $4\cos x \operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg} x + \sin x = 0$.

C2 При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_2 x$ и $g(x) = \log_2(3-x)$ будут отличаться меньше, чем на 1?

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3-С5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3 Для монтажа оборудования необходима подставка объёмом 1296 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет вмонтировано в пол, а её задняя стенка – в стену цеха. Для соединения подставки по рёбрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

***С4** Основанием пирамиды FABC является треугольник ABC, в котором $\angle ABC = 90°$, AB = 3, BC = 4. Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC. Найдите объем пирамиды AMLC.

С5 Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства $\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \frac{x-11}{x-8}\right) \ge 0$, а остальные **не являются** решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Ответы к заданиям демонстрационного варианта по математике.

Ответы к заданиям с выбором ответа

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
А1	**3**	*А6*	**2**
А2	**4**	*А7*	**2**
А3	**2**	*А8*	**3**
А4	**3**	*А9*	**1**
А5	**1**	*А10*	**2**

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
В1	**– 1,5**
В2	**6**
В3	**2,6**
В4	**0,2**
В5	**1**
В6	**2,7**
В7	**– 2**
В8	**5**
В9	**16550**
В10	**0,6**
В11	**12**

Ответы к заданиям с развернутым ответом

№ задания	Ответ
С1	$\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi k,\ k\in Z$
С2	$(1;\,2)$
С3	12 дм, 12 дм и 9 дм
С4	$\frac{128}{41}$
С5	$(2;\,2,5)$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ И ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

C1 Решите уравнение $4\cos x \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} x + \sin x = 0$.

Решение.

1) $\dfrac{4\cos^2 x + 4\cos x + \sin^2 x}{\sin x} = 0,\ \dfrac{3\cos^2 x + 4\cos x + 1}{\sin x} = 0.$

2) $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\pm\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) представление левой части уравнения в виде дроби; 2) решение полученного уравнения. Все преобразования и вычисления проведены правильно, получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. При решении уравнения в шаге 2) допущена описка и/или негрубая вычислительная ошибка, не влияющая на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой описки и/или ошибки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие указанным выше критериям выставления оценок в 1 или 2 балла.

C2 При каких значениях x соответственные значения функций $f(x)=\log_2 x$ и $g(x)=\log_2(3-x)$ будут отличаться меньше, чем на 1?

Решение.

1) $\left|\log_2(3-x)-\log_2 x\right|<1.$

2) $\log_2(3-x)-1<\log_2 x<\log_2(3-x)+1 \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{2}<x<(3-x)\cdot 2 \Leftrightarrow$

$$3-x<2x<12-4x \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2.$$

Ответ: $(1;2)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания C2
2	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) составление неравенства, содержащего модуль; 2) решение неравенства. Все преобразования и вычисления проведены правильно, получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность шагов решения. При решении неравенства в шаге 2) допущена описка и/или негрубая вычислительная ошибка, не влияющая на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой описки и/или ошибки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие указанным выше критериям выставления оценок в 1 или 2 балла.

C3 Для монтажа оборудования необходима подставка объемом 1296 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет вмонтировано в пол, а ее задняя стенка – в стену цеха. Для соединения подставки по ребрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

Решение.

1) В основании подставки лежит квадрат. Пусть x – длина его стороны, а y – высота подставки. Тогда ее объем равен x^2y и $x^2y=1296$, т.е. $y=\dfrac{1296}{x^2}$.

2) Сварить надо 3 ребра верхнего основания и 2 ребра грани, параллельной стене. Значит, общая длина L сварки равна $3x+2y$, т.е.

$$L(x)=3x+2\cdot\frac{1296}{x^2},\qquad x>0.$$

3) Найдем производную $L'(x)=\left(3x+\dfrac{2592}{x^2}\right)'=3-\dfrac{5184}{x^3}=\dfrac{3(x^3-1728)}{x^3}$.

Поэтому $L'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^3-1728=0 \;\Leftrightarrow\; x^3=12^3 \;\Leftrightarrow\; x=12$,
т.е. функция $L(x)$ при $x>0$ имеет единственную критическую точку $x=12$.

4) Если $0<x<12$, то $0<x^3<1728$ и $L'(x)<0$. Если $x>12$, то $x^3>1728$ и $L'(x)>0$. Значит, $x=12$ является точкой минимума и $L_{\text{наим}}=L(12)$. Тогда высота подставки равна $y=\dfrac{1296}{x^2}=\dfrac{1296}{144}=9$.

Ответ: 12 дм, 12 дм и 9 дм.

Замечание.
Возможно, но маловероятно решение без производных. Для этого используем неравенство $a+b+c\ \ge\ 3\cdot\sqrt[3]{abc}$ о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трех неотрицательных чисел.

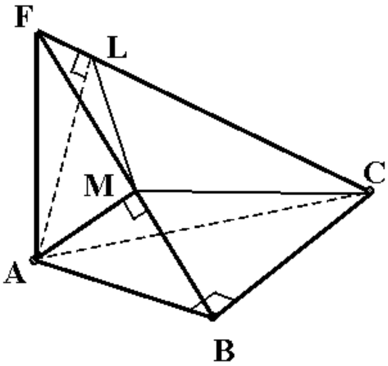
$$L(x)=3x+2\cdot\frac{1296}{x^2}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+\frac{2592}{x^2}\ \ge\ 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{2592}{x^2}\right)}\ =3\cdot\sqrt[3]{3^3\cdot 216}\ =\ 54.$$

При этом равенство достигается, только если все три слагаемых равны между собой, т.е. $\dfrac{3}{2}x\ =\ 2\cdot\dfrac{1296}{x^2}$, $x=12$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) определение формы подставки, выражение ее высоты через длину стороны основания; 2) выражение общей длины сварки через длину стороны основания; 3) вычисление производной и нахождение критической точки функции длины сварки; 4) проверка того, что найденная критическая точка является точкой минимума. Обоснованы все моменты решения: а) в шаге 2) перечислены ребра, которые надо сваривать; б) в шаге 3) явно указано, что имеется единственная критическая точка; в) в шаге 4) изменение знаков производной обосновано или неравенствами, или подстановкой значений, или ссылкой на характер монотонности кубической функции. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 1) допустимо наличие лишь формулы $x^2y=1296$, в шаге 2) допустимо наличие только равенства $L=3x+2y$. Обоснованы ключевые моменты б) и в). Допустима 1 описка, и/или негрубая вычислительная ошибка в шагах 3), 4), не влияющая на правильность дальнейшего хода решения. Возможен неверный ответ (например, указано верное наименьшее значение длины сварки, а не размеров подставки).
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Верно выполнены шаги 1) – 3). Обоснован ключевой момент б). Допустимы 1 – 2 негрубые ошибки или описки в вычислениях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате может быть получен неверный ответ.
1	Общая идея, ход решения верны, но решение, возможно, не завершено. Верно выполнены шаги 1) и 2), т.е. текстовая задача верно сведена к своей математической модели – исследованию функции. Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено. Обоснования ключевых моментов отсутствуют. Допустимы негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях. В результате этих ошибок может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

C4 Основанием пирамиды FABC является треугольник ABC, в котором $\angle ABC = 90°$, AB = 3, BC = 4. Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC. Найдите объем пирамиды AMLC.

Решение.



1) Объем пирамиды AMLC вычислим по формуле $V_{AMLC} = \frac{1}{3} S_{CLM} h$, где h – высота пирамиды. По условию FA⊥ABC. Значит, FA⊥BC. Но AB ⊥ BC, следовательно, BC⊥ABF и поэтому AM⊥BC. Значит, AM – высота пирамиды AMLC, опущенная на плоскость грани CLM, т.е. $h = AM$. Из прямоугольного треугольника ABF: $h = \frac{AB \cdot AF}{BF} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$.

2) Треугольники CLM и CFM имеют общую высоту, проведенную из вершины M. Поэтому $\frac{S_{CLM}}{S_{CFM}} = \frac{CL}{CF}$. Аналогично, $\frac{S_{CFM}}{S_{CFB}} = \frac{FM}{BF}$. Следовательно, $\frac{S_{CLM}}{S_{CFB}} = \frac{CL \cdot FM}{CF \cdot BF}$. Отсюда $S_{CLM} = \frac{CL \cdot FM}{CF \cdot BF} \cdot S_{CFB}$.

3) Отрезки CF и CL, BF и FM найдем соответственно из прямоугольных треугольников ACF и ABF. Имеем $CF=\sqrt{AF^2+AC^2} = \sqrt{41}$, $CL=\frac{AC^2}{FC} = \frac{25}{\sqrt{41}}$,

$BF=\sqrt{AB^2+AF^2} = 5$, $FM=\frac{AF^2}{BF} = \frac{16}{5}$.

4) Поскольку BC⊥ABF, то BC⊥BF. Поэтому площадь треугольника CFB найдем по формуле $S_{CFB} = \frac{FB \cdot BC}{2} = 10$.

Вычислим площадь основания пирамиды AMLC:

$$S_{CLM} = \frac{CL \cdot FM}{CF \cdot BF} \cdot S_{CFB} = \frac{25}{\sqrt{41}} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{160}{41}.$$

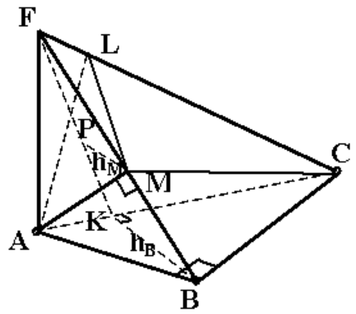
Искомый объем $V_{AMLC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{160}{41} \cdot \frac{12}{5} = \frac{128}{41}$.

Ответ: $\frac{128}{41}$.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания С4**
4	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) вычислена высота пирамиды; 2) выражена S_{CLM} через S_{CFB}; 3) вычислены отрезки CF, CL, BF, FM ; 4) вычислен искомый объем пирамиды AMLC . Верно обоснованы ключевые моменты решения: а) перпендикулярность отрезка AM плоскости BCF; б) способ вычисления площади основания пирамиды AMLC . Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1) – 4). Приведены утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения. Допустимо отсутствие обоснований ключевых моментов решения или неточности в обоснованиях[1], но не грубые ошибки. Допустимы одна описка и/или негрубая ошибка в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этой описки и/или ошибки возможен неверный ответ.
2	Приведены шаги решения 2) – 4). Утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения, либо оба отсутствуют, либо приведено только одно из них. Но сами ключевые моменты использованы в решении. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустимы описки и/или негрубые ошибки в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено. На чертеже явно обозначено (в соответствующих треугольниках обозначены углы, равные 90^0) или описано словами, что AM высота пирамиды, и вычислена ее длина. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок. Допустимы негрубые ошибки в преобразованиях и вычислениях, не влияющие на правильность хода решения.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок 1 – 4 баллов.

[1] Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение или на признак, или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

Второй способ.



1) Объем пирамиды AMLC вычислим по формуле $V_{AMLC} = \frac{1}{3} S_{ALC} h_M$, где h_M - расстояние от вершины M до плоскости FAC. Так как $FA \perp AC$ и $AL \perp FC$, то $S_{FAC} = \frac{AF \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = 10$ и AL$= \frac{AF \cdot AC}{FC} = \frac{20}{\sqrt{41}}$.

Следовательно,

$LC = \sqrt{25 - \frac{400}{41}} = \frac{25}{\sqrt{41}}$ и $S_{ALC} = \frac{AL \cdot LC}{2} = \frac{250}{41}$.

2) Проведем высоту h_B прямоугольного треугольника ABC, $h_B \perp AC$. Так как $AF \perp ABC$, то $h_B \perp AF$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $h_B \perp FAC$. Поэтому h_B - расстояние от вершины B до плоскости FAC.

3) Итак, $h_B = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12}{5}$. Перпендикуляры BK и MP, опущенные на плоскость FAC из точек B и M, параллельны между собой и лежат в плоскости, содержащей прямую BF. Поэтому треугольники FBK и FMP подобны. Отсюда $\frac{BF}{MF} = \frac{BK}{MP} = \frac{h_B}{h_M}$. Поэтому $h_M = \frac{12}{5} \cdot \frac{MF}{BF}$.

4) Из прямоугольного треугольника FAB: $BF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ и AM$= \frac{AF \cdot AB}{BF} = \frac{12}{5}$. Из прямоугольного треугольника FAM: $MF = \sqrt{16 - \frac{144}{25}} = \frac{16}{5}$. Следовательно, $h_M = \frac{12}{5} \cdot \frac{16}{5 \cdot 5}$ и

$V_{AMLC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 16}{125} \cdot \frac{250}{41} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 2}{41} = \frac{128}{41}$.

Ответ: $\frac{128}{41}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) вычислена площадь основания ALC пирамиды $MALC$; 2) построена высота h_B пирамиды; 3) вычислена h_B и найдено соотношение между высотами h_B и h_M; 4) вычислен искомый объем пирамиды. Верно обоснованы ключевые моменты решения: а) в шаге 2) при построении h_B имеется ссылка на признак перпендикулярности прямой и плоскости; б) в шаге 3) обосновано подобие треугольников. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1) – 4). Приведены утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения. Допустимо отсутствие обоснований ключевых моментов решения или неточности в обоснованиях[2], но не грубые ошибки. Допустимы одна описка и/или негрубая ошибка в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этой описки и/или ошибки возможен неверный ответ.
2	Приведены шаги решения 1), 3), 4). Утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения, либо оба отсутствуют, либо приведено только одно из них. Но сами ключевые моменты использованы в решении. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустимы описки и/или негрубые ошибки в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено. Имеется шаг 3) решения, вычислена h_B. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок. Допустимы негрубые ошибки в преобразованиях и вычислениях, не влияющие на правильность хода решения.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок 1 – 4 баллов.

[2] Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение или на признак, или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

C5 Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства $\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \dfrac{x-11}{x-8}\right) \ge 0$, а остальные **не являются** решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Решение.

1) По условию $\log_4 \dfrac{x-11}{x-8} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-11}{x-8} > 1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x-11}{x-8} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{x-8} < 0 \Leftrightarrow x < 8$.

Если $0,5x - 1 > 1$, $x > 4$, то $\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \dfrac{x-11}{x-8}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_4 \dfrac{x-11}{x-8} \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-11}{x-8} \ge 4 \Leftrightarrow 4 - \dfrac{x-11}{x-8} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(x-7)}{x-8} \le 0 \Leftrightarrow 7 \le x < 8$.

Если $0 < 0,5x - 1 < 1$, $2 < x < 4$, то $x < 8$ и $\log_4 \dfrac{x-11}{x-8} > 0$. Кроме того, так как $x < 7$, то $\dfrac{3(x-7)}{x-8} \ge 0$. Таким образом, $\log_4 \dfrac{x-11}{x-8} \le 1$. Значит, $\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \dfrac{x-11}{x-8}\right) \ge 0$. Следовательно, все числа в интервале $2 < x < 4$ являются решениями исходного неравенства.

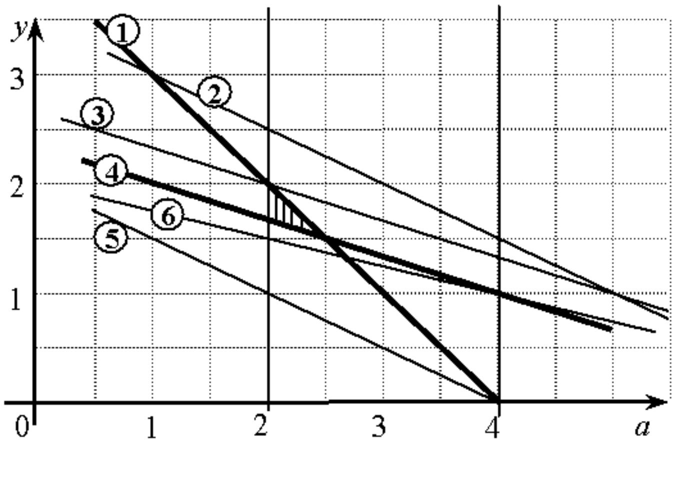
Объединяя найденные множества решений, получаем ответ: $(2;\ 4) \cup [7;\ 8)$.

2) Пусть a и d – первый член и разность прогрессии. Если $a + d$ и $a + 3d$ лежат в одном и том же из двух промежутков $(2;\ 4)$ и $[7;\ 8)$, то в нем лежит и $a + 2d$. Но тогда третий член прогрессии также будет решением заданного неравенства. Противоречие. Значит,

$$2 < a < a + d < 4 \le a + 2d < 7 \le a + 3d < 8 \le a + 4d.$$

3) Требуется найти все значения $2 < a < 4$, при которых эта система неравенств имеет решения относительно d. Выпишем четыре неравенства относительно d:

$$0 < d < 4 - a, \qquad \frac{4-a}{2} \le d < \frac{7-a}{2}, \qquad \frac{7-a}{3} \le d < \frac{8-a}{3}, \qquad \frac{8-a}{4} \le d.$$



Систему этих линейных неравенств решим графическим способом. Построим прямые $y_1 = 4 - a$, $y_2 = \dfrac{7-a}{2}$, $y_3 = \dfrac{8-a}{3}$, $y_4 = \dfrac{7-a}{3}$, $y_5 = \dfrac{4-a}{2}$, $y_6 = \dfrac{8-a}{4}$.

На интервале $(2;4)$ прямая y_1 лежит ниже прямых y_2 и y_3, а прямая y_4 лежит выше прямых y_5 и y_6,

4) Поэтому достаточно найти все значения $2 < a < 4$, при которых решения имеет только одно неравенство $y_4 \le d < y_1$. Прямые y_1 и y_4 пересекаются в точке $(2{,}5;\ 1{,}5)$ и $y_4 < y_1 \Leftrightarrow \frac{7-a}{3} < 4-a \Leftrightarrow a < 2{,}5$.

Ответ: $(2;\ 2{,}5)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) нахождение множества решений логарифмического неравенства; 2) запись условия задачи в виде неравенств относительно a и d; 3) рассмотрение системы четырех двойных неравенств относительно d; 4) сведение к случаю одного двойного неравенства, его решение. Обоснованы все моменты решения: а) в шаге 1) преобразования обоснованы или ссылками на свойства логарифмов, или явными указаниями на равносильность этих преобразований; б) в шаге 2) принадлежность $a+d \in (2;\ 4)$ и $a+3d \in [7;\ 8)$ обоснована ссылкой на то, что $a+2d$ – не решение логарифмического уравнения; в) шаг 3) обоснован или верным построением графиков прямых, или алгебраической проверкой расположения прямых на интервале $(2;\ 4)$; г) в шаге 4) имеется ссылка на достаточность рассмотрения только одного двойного неравенства; явно приведено решение неравенства $y_4 < y_1$. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 4) допустимо выписывание ответа со ссылкой только на графики. Обоснованы ключевые моменты а), б), в). Допустима 1 описка и/или негрубая вычислительная ошибка в шаге 4) в результате чего может быть получен неверный ответ.
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Верно выполнены шаги 1) и 2) решения, верно составлены все линейные неравенства относительно d. Обоснованы ключевые моменты а) и б). Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено. Допустимы 1 – 2 негрубые ошибки в вычислениях или построениях графиков, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате может быть получен неверный ответ.
1	Общая идея, ход решения верны, но решение, возможно, не завершено. Верно выполнен шаг 1) решения. Обоснован ключевой момент а). Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено, а обоснования ключевых моментов б) – г) отсутствуют. Допустимы негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях. В результате этих ошибок может быть получен неверный ответ
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

Примечание

Данное программное обеспечение можно скачать из интернета по указанным адресам.

Сайт программы	http://www.dessci.com/en/
Прямой линк (30 дней бесплатно)	http://www.dessci.com/en/dl/MathType52Setup.exe