«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки

________________ **В.А. Болотов**
«___» ____________ **2006 г.**

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель Научно-методического совета ФИПИ по математике

________________ **Г.Г. Канторович**
«30» октября **2006 г.**

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант КИМ 2007 г.

подготовлен Федеральным государственным научным учреждением
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Директор ФИПИ **А.Г.Ершов**

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к демонстрационному варианту

При ознакомлении с Демонстрационным вариантом 2007 года следует иметь в виду, что задания, включенные в демонстрационный вариант, не отражают всех вопросов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2007 году. Полный перечень вопросов, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2007 года, приведен в кодификаторе, помещенном на сайтах www.ege.edu.ru и www.fipi.ru .

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить представление о структуре будущих КИМ, числе, форме, уровне сложности заданий: базовом, повышенном и высоком. Приведенные критерии оценки выполнения заданий с развернутым ответом (тип «С»), включенные в этот вариант, позволят составить представление о требованиях к полноте и правильности записи развернутого ответа.

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки и сдачи ЕГЭ в соответствии с целями, которые они ставят перед собой.

Для правильной распечатки файла демонстрационного варианта по математике необходимо установить на компьютере программное обеспечение MathType версии не ниже 5.0 (см. Примечание в конце файла).

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант 2007 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из трех частей и содержит 26 заданий.

Часть 1 содержит 13 заданий (А1 – А10, В1 – В3) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов. К каждому заданию А1 – А10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям В1 – В3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (В4 – В11, С1, С2) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. К заданиям В4 – В11 надо дать краткий ответ, к заданиям С1 и С2 – записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два – алгебраических (С3, С5) и одно – геометрическое (С4). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение <u>четырех</u> заданий (В9, В10, В11, С4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой.

Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов №1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1 Найдите значение выражения $4^{6p} \cdot 4^{-4p}$ при $p = \frac{1}{4}$.

1) 1 2) 2 3) 32 4) 4

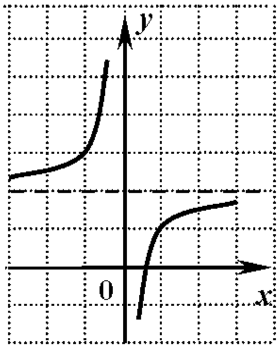
A2 Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$.

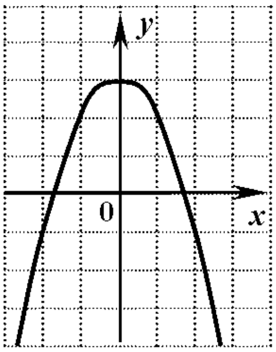
1) 1,2 2) $\dfrac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{5}$ 3) 2,4 4) $\sqrt[3]{2}$

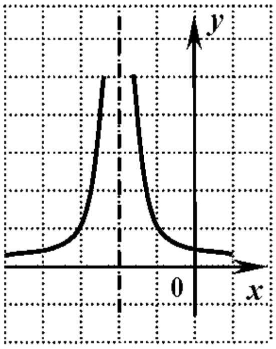
A3 Найдите значение выражения $\log_4(64c)$, если $\log_4 c = -3{,}5$.

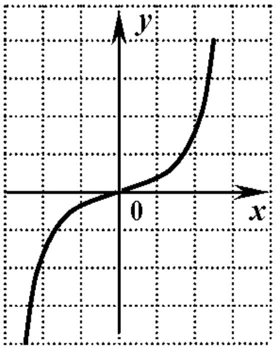
1) $-6{,}5$ 2) $-0{,}5$ 3) $-10{,}5$ 4) $-67{,}5$

A4 На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

1)


2)


3)


4)


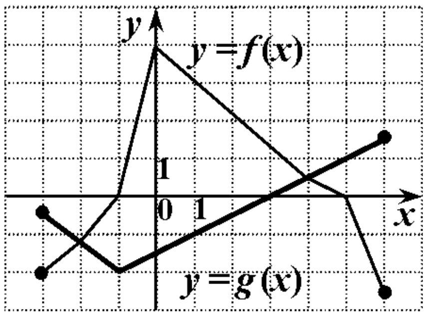
A5 Найдите производную функции $y=(x-3)\cos x$.

1) $y'=\cos x+(x-3)\sin x$
2) $y'=(x-3)\sin x-\cos x$
3) $y'=\cos x-(x-3)\sin x$
4) $y'=-\sin x$

A6 Укажите множество значений функции $y=2^x+5$.

1) $(5;\ +\infty)$ 2) $(0;\ +\infty)$ 3) $(-\infty;\ +\infty)$ 4) $(7;\ +\infty)$

A7 На рисунке изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, заданных на промежутке $[-3;\ 6]$. Укажите множество всех значений x, для которых выполняется неравенство $f(x)\ge g(x)$.



1) $[-1;\ 5]$
2) $[-3;\ -2]\cup[4;\ 6]$
3) $[-3;\ -1]\cup[5;\ 6]$
4) $[-2;\ 4]$

A8 Найдите область определения функции $f(x)=\dfrac{25}{3-\sqrt[4]{x}}$.

1) $[0;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$
2) $[0;\ +\infty)$
3) $[0;\ 81)\cup(81;\ +\infty)$
4) $(-\infty;\ 81)\cup(81;\ +\infty)$

A9 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(7x-21) > \log_{\frac{1}{2}}(6x)$.

1) $(-\infty;\ 21)$ 2) $(3;\ 21)$ 3) $(3;+\infty)$ 4) $(21;+\infty)$

A10 Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1=0$.

1) $\pm\frac{4}{3}+8n,\quad n\in Z$
2) $\frac{4}{3}+8n,\quad n\in Z$
3) $\pm\frac{2}{3}+4n,\quad n\in Z$
4) $\frac{2}{3}+4n,\quad n\in Z$

Ответом к заданиям B1 – B11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Решите уравнение $7\cdot 5^{\log_5 x}=x+21$.

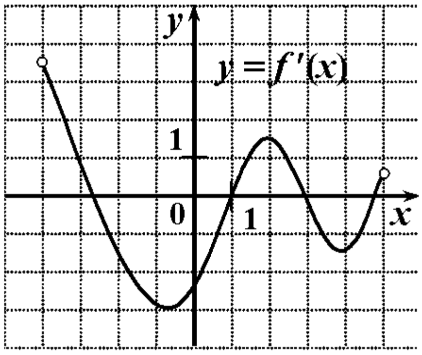
B2 Найдите значение выражения $5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=0{,}5$.

B3 Решите уравнение $x^2\sqrt{x-1}-4\sqrt{x-1}=0$.
(Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней).

ЧАСТЬ 2

B4 Найдите значение выражения $2^x - y$, если $(x; y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$

B5 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 45^o к положительному направлению оси абсцисс.



B6 Найдите значение выражения $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ при $x = 1,2007$.

B7 Найдите наименьший корень уравнения $\log_3 (x+1)^2 + \log_3 |x+1| = 6$.

B8 Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 2 и $f(1) = 5$. Найдите значение выражения $3f(7) - 4f(-3)$.

***B9** Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11 %. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11 %) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

***B10** Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8, а сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BD.

***B11** Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Найдите значение функции $f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{0,1}(x+5)}$ в точке максимума.

C2 Решите уравнение $\sin 2x\cdot \operatorname{tg} x+1=3\sin x$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3 – C5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3 Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(1;2)$.

***C4** Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

C5 Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} y(1-x)^2+x^3=0 \\ 2x-\dfrac{10}{x\log_y 2}=5\log_{32}(0,125y^2)-7. \end{cases}$$

Ответы к заданиям демонстрационного варианта по математике.

Ответы к заданиям с выбором ответа

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
A1	**2**	*A6*	**1**
A2	**3**	*A7*	**4**
A3	**2**	*A8*	**3**
A4	**4**	*A9*	**2**
A5	**3**	*A10*	**1**

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	**3,5**
B2	**– 3**
B3	**3**
B4	**17**
B5	**3**
B6	**2**
B7	**– 10**
B8	**– 5**
B9	**1240**
B10	**4,8**
B11	**10**

Ответы к заданиям с развернутым ответом

№ задания	Ответ
C1	2
C2	$(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$
C3	(– 1; 2]
C4	1
C5	2

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ И ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Внимание! При выставлении баллов за выполнение задания в «Протокол проверки ответов на задания бланка № 2» следует иметь в виду, что **если ответ отсутствует** (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется «**Х»**, а не «0» **.**

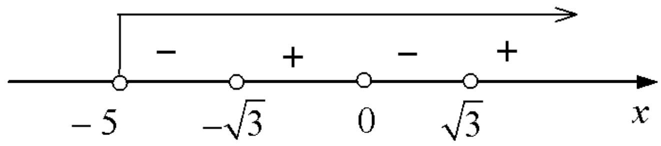
C1

Найдите значение функции $f(x) = 10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5} - \log_{0,1}(x+5)}$ в точке максимума.

Решение:

1. Найдем область определения функции f:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3-3x}{x+5} > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases}.$$



$x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; \infty)$

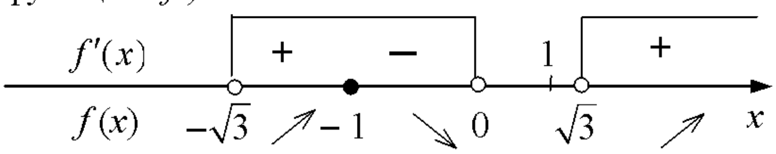
Упростим формулу, задающую функцию:

$$f(x) = 10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5} + \lg(x+5)} = 10^{\lg(x^3-3x)} = x^3 - 3x.$$

2. $f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; \infty)$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 3(x^2 - 1)$.

$f'(x) = 0$ при $x = -1$ ($x = 1$ не принадлежит области определения функции f).



$x = -1$ - точка максимума и $f(-1) = 2$

Ответ: 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) найдена область определения и упрощена формула, задающая функцию; 2) найдена точка максимума и значение функции в этой точке. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения, но в шаге 2 допущена одна описка и/или вычислительная ошибка, не влияющая на дальнейший ход решения. В результате этой описки или ошибки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

C2 Решите уравнение $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x$

Решение:

1) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

2) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;
$\sin x = 1$ или $\sin x = 0{,}5$.

а) $\sin x = 1$, тогда $\cos x = 0$, значит, $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ не являются решениями исходного уравнения.

б) $\sin x = 0{,}5$, тогда $\cos x \neq 0$ и $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) уравнение сведено к равносильной системе, состоящей из квадратного уравнения относительно $\sin x$ и неравенства $\cos x \neq 0$; 2) решено уравнение и произведен отбор корней, удовлетворяющих условию $\cos x \neq 0$.[1] Все преобразования и вычисления выполнены верно, получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения, в шаге 2 допущена вычислительная ошибка или описка. В результате этой описки или ошибки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие указанным выше критериям выставления оценок в 1 или 2 балла.

C3 Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(1;2)$.

__Решение__:

1) Неравенство приводится к виду $(2x^2-x-3)a+(-x^2-x)<0$, в котором левая часть, рассматриваемая как функция от a, есть **линейная** функция $f(a)=\left(2x^2-x-3\right)a+\left(-x^2-x\right)$ с коэффициентами, зависящими от x. В задаче требуется найти все значения x, при каждом из которых эта функция отрицательна для всех $a\in(1;2)$.
2) Для отрицательности линейной функции f на промежутке (1; 2) необходимо, чтобы она была отрицательна или равна нулю при каждом из двух значений $a=1$ и $a=2$, т.е. выполнялась система $\begin{cases} f(1)\le 0 \\ f(2)\le 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} f(1)\le 0 \\ f(2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3\le 0 \\ 3x^2-3x-6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)\le 0 \\ (x-2)(x+1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le x\le 2.$$

[1] __Примечание.__ Для получения 1 балла в решении должно быть указано в любой форме, что учтено условие $\cos x \neq 0$.

3) Для выполнения требования задачи функция f не должна равняться нулю при обоих значениях $a=1$ и $a=2$ одновременно, т. е. **не** выполняется система $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)=0 \\ (x-2)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

4) Выполнения двух полученных условий уже достаточно для отрицательности $f(a)$ на данном промежутке. Таким образом, искомые значения x — это решения системы $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le 2.$

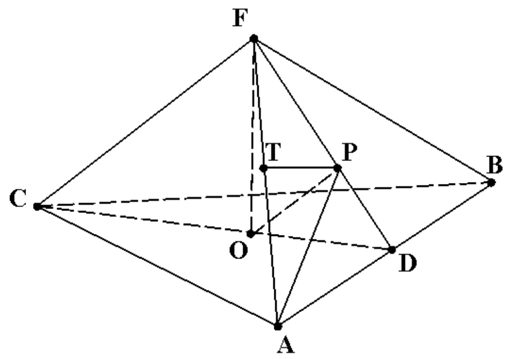
Ответ: $(-1;2]$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) задача сведена к требованию отрицательности линейной функции на данном интервале; 2) получено первое необходимое условие на переменную x и решена соответствующая система; 3) получено второе необходимое условие на переменную x и решена соответствующая система; 4) имеется вывод о том, что выполнение сразу двух указанных необходимых условий уже достаточно. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность шагов 2) — 4) решения, а шаг 1) либо отсутствует, либо логически неверен. Получен верный ответ. Допустима описка, в результате которой возможен неверный ответ.
2	Верно выполнен только шаг 2) решения, а остальные шаги или отсутствуют, или сделаны с ошибкой.
1	Выполнен только шаг 2) решения, но в нем нестрогие неравенства заменены строгими. Остальные шаги решения или отсутствуют, или сделаны с ошибкой.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.

***С4** Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

Решение:

1) Пусть пирамида $FABC$ – данная правильная пирамида, FO – ее высота, тогда точка O – центр треугольника ABC.



Пусть CD – медиана треугольника ABC, тогда $O \in CD$ и $CO : OD = 2 : 1$. Треугольник FAB равнобедренный и точка D – середина AB, значит, FD – медиана, высота и биссектриса треугольника FAB.

Пусть основание конуса вписано в треугольник FAB. Тогда центр основания конуса (точка P) является точкой пересечения биссектрис треугольника FAB. Следовательно, OP – высота конуса, PD – радиус основания, а OD – образующая конуса. Тогда $OP \perp FD$.

2) Пусть $PT \perp FA$. Тогда $PT=PD$ как радиусы окружности, вписанной в треугольник FAB. Прямоугольные треугольники FDA и FTP подобны (имеют общий угол при вершине F). Следовательно, $\frac{FA}{FP} = \frac{AD}{PT}$ или $\frac{FA}{AD} = \frac{FP}{PD}$, так как $PT=PD$. Отсюда $\frac{FA+AD}{AD} = \frac{FP+PD}{PD}$, т.е. $PD = \frac{AD \cdot FD}{FA+AD}$. Вычислим PD другим способом. Прямоугольные треугольники FOD и OPD подобны, так как имеют общий угол D. Поэтому $\frac{PD}{OD} = \frac{OD}{FD}$ и $PD = \frac{OD^2}{FD}$. Итак, $\frac{AD \cdot FD}{FA + AD} = \frac{OD^2}{FD}$ (1).

3) По условию $AB=2\sqrt{7}$. Пусть $AF=b$ и $PD = r$. Из треугольника FAD получаем $FD = \sqrt{b^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{b^2 - 7}$, а из треугольника ABC получаем $CD = \sqrt{21}$, $OD = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}\sqrt{21}$. Подставим найденные величины в равенство (1): $\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{b^2-7}}{b+\sqrt{7}} = \frac{7}{3\sqrt{b^2-7}}$. Отсюда получаем: $3\left(b-\sqrt{7}\right) = \sqrt{7}$. Следовательно, $b = \frac{4\sqrt{7}}{3}$ и $r = \frac{7}{3\sqrt{b^2-7}} = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{16 \cdot 7}{9} - 7}} = 1$.

Ответ: 1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) установлено, что центр основания конуса – точка пересечения биссектрис боковой грани пирамиды; 2) получены два соотношения для вычисления радиуса основания конуса; 3) выполнены преобразования и вычисления, необходимые для нахождения радиуса основания конуса. Имеются верные обоснования всех ключевых моментов решения: а) положения центра основания конуса; б) соотношения между отрезками FA, AD, FD и FP, а также между отрезками OD, PD и FD. Все преобразования и вычисления выполнены правильно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Явно описано положение центра основания конуса. Верно найдены соотношения между отрезками, необходимые для решения задачи. Допустимо отсутствие обоснований или неточности в обосновании ключевых моментов. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустима одна описка и/или негрубая ошибка в преобразованиях или вычислениях, не влияющая на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допустимо отсутствие обоснований или неточности в обоснованиях ключевых моментов решения. Верно найдены соотношения между отрезками, необходимые для решения задачи. Допустимы одна-две негрубые ошибки и/или описки в преобразованиях и/или вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
1	Общая идея и способ решения верные, но, возможно, решение не завершено. При этом верно найдено соотношение между отрезками FA, AD, FD и FP. Ключевые моменты решения не обоснованы или имеются неверные обоснования. Допустимы одна-две негрубые ошибки и/или описки в преобразованиях и/или вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок 1 – 4 баллов.

C5 Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ 2x - \dfrac{10}{x\log_y 2} = 5\log_{32}(0{,}125y^2) - 7. \end{cases}$$

<u>Решение</u>:

1) По условию $x \neq 0$, а $y > 0$, $y \neq 1$. Тогда второе уравнение системы равносильно следующим уравнениям: $2x - \frac{10}{x}\cdot\log_2 y = \log_2(0{,}125y^2) - 7$,

$$2x - \frac{10}{x}\cdot\log_2 y = 2\log_2 y - 3 - 7, \qquad x - \frac{5\log_2 y}{x} = \log_2 y - 5,$$

$$x^2 + (5 - \log_2 y)x - 5\log_2 y = 0, \qquad (x+5)(x - \log_2 y) = 0.$$

Если $x = -5$, то первое уравнение системы имеет вид $y\cdot 36 - 125 = 0$, $y = 125/36 > 0$. Значит, $(-5; 125/36)$ – решение системы.

2) Если $x \neq -5$, то $x = \log_2 y$, $y = 2^x$ и первое уравнение системы имеет вид $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0$. Если $x > 0$, то $x^3 > 0$ и $2^x(1-x)^2 + x^3 > 0$, т.е. положительных корней нет. Если $x < 0$, то $1 - x \neq 0$ и

$$2^x = -x^3\cdot(1-x)^{-2}. \qquad (*)$$

3) Рассмотрим функции $y = 2^x$ и $y = -x^3\cdot(1-x)^{-2}$.

Функция $y = 2^x$ возрастает $(2 > 1)$.

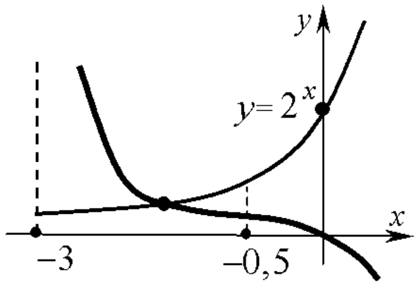
Исследуем функцию $y = -x^3\cdot(1-x)^{-2}$, $x < 0$:

$$y' = -3x^2(1-x)^{-2} - x^3(-2)(1-x)^{-3}(-1) =$$

$$= -x^2(1-x)^{-3}(3(1-x) + 2x) = -x^2(1-x)^{-3}(3-x) < 0,$$

т.к. $x^2 > 0$, $3 - x > 0$, $(1-x)^{-3} > 0$. Значит, эта функция убывает при $x < 0$.

4) Если $x = -3$, то $2^x < 1 < -x^3\cdot(1-x)^{-2}$. Если же $x = -0{,}5$, то $2^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $-x^3\cdot(1-x)^{-2} = \frac{1}{8}:\frac{9}{4} = \frac{1}{18}$ и $2^x > -x^3\cdot(1-x)^{-2}$. Так как обе функции изменяются непрерывно, то имеется единственный корень x_0 уравнения (*), $-3 < x_0 < -0{,}5$; $x_0 \neq -5$. Поэтому



исходная система имеет ровно два решения $(x_0;\ 2^{x_0})$ и $(-5; 125/36)$.

Ответ: 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) преобразование второго уравнения системы к виду $(x+5)(x-\log_2 y)=0$; нахождение решения $(-5;\,125/36)$ системы; 2) сведение системы к уравнению относительно x; проверка того, что при $x>0$ оно не имеет корней; 3) сравнение характера монотонности обеих частей уравнения (*); 4) проверка того, что уравнение (*) имеет хотя бы один корень. Обоснованы все моменты решения: а) приведена ОДЗ данной системы уравнений; б) в шаге 1) есть ссылка (словесная или знаком $\Leftrightarrow$) на равносильность; в) в шаге 2) есть явная ссылка на положительность $2^x(1-x)^2+x^3$ при $x>0$; г) в шаге 4) указаны значения аргумента, в которых левая часть уравнения (*) больше (меньше) его правой части; д) наличие корня обосновано или эскизами графиков, или же явной словесной ссылкой на непрерывность. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность шагов 1) – 4) решения. Обоснованы ключевые моменты а), б), в). Допустимо отсутствие обоснований ключевых моментов г) и д). Допустима 1 описка и/или негрубая вычислительная ошибка в шаге 4).
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Верно выполнены шаги 1) и 2) решения: составлено уравнение (*). Допускается отсутствие одного из шагов 3) или 4) при частичном выполнении другого шага решения. Обоснованы ключевые моменты б) и в). Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено. Допустимы 1 – 2 негрубые ошибки в вычислениях или построениях графиков, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения.
1	Общая идея, ход решения верны, но решение, возможно, не завершено. Верно выполнен шаг 1) решения: найдено решение $(-5;\,125/36)$ системы. В шаге 2) уравнение $2^x(1-x)^2+x^3=0$ относительно x составлено, но его исследование не завершено. Обоснован ключевой момент б). Допустимо, что решение не завершено, а обоснования других ключевых моментов отсутствуют.

	Допустимы негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

Примечание

Данное программное обеспечение можно скачать из интернета по указанным адресам.

Сайт программы	http://www.dessci.com/en/
Прямой линк (30 дней бесплатно)	http://www.dessci.com/en/dl/MathType52Setup.exe