1970 год

Механико-математический факультет

► **1.** Решить неравенство
$$\log_2(1+\cos 4x) \leqslant 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x.$$

► **2.** Найти все действительные решения системы
$$\begin{cases} |xy-2| = 6-x^2, \\ 2+3y^2 = 2xy. \end{cases}$$

► **3.** Три гонщика (A, потом B и затем C) стартуют с интервалом в 1 мин из одной точки кольцевого шоссе и двигаются в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более двух минут. Сделав три круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через три минуты он вторично обгоняет C. Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив 4 круга. Сколько минут тратит на круг гонщик A?

► **4.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD, а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD; вторая окружность касается сторон AB, BC и CD. Найти AC.

► **5.** Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1. Отрезок BD есть высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

1971 год

Механико-математический факультет

► **1.** Решить уравнение

$$(x+4)\log_4(x+1)-(x-4)\log_2(x-1)=\frac{8}{3}\log_2(x^2-1).$$

► **2.** Найти все x из отрезка $0 \leqslant x \leqslant \pi$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

► **3.** Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

► **4.** Найти все α, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x+\alpha \leqslant 0, \\ x^2-4x-6\alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

► **5.** В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной около него окружности равен R, и $AB = 2 \cdot BC$.

1972 год

Механико-математический факультет

► **1.** Найти все значения x, при которых справедливо неравенство
$$\frac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} \leqslant \frac{\log_2 \sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}$$

► **2.** Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 км короче другой. Из B в A по более короткой дороге вышел пешеход и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист. Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через 2 часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист проехал два раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 км от пункта B. (Скорости постоянны).

► **3.** В треугольнике ABC имеем $AB = 20$ м, $AC = 24$ м. Известно, что вершина C, центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

► **4.** В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом $60°$. Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1 м. Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB и найти высоту пирамиды.

► **5.** Даны три уравнения с действительными коэффициентами:
$$1)\ x^2 - (a+b)x + 8 = 0,$$
$$2)\ x^2 - b(b+1)x + c = 0,$$
$$3)\ x^4 - b(b+1)x^2 + c = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c, если $b > 3$.

1973 год

Механико-математический факультет

► **1.** Решить уравнение

$$\cos 2x + \log_4\left(\frac{1}{2}\sin x\right) + 2\cos x \log_{1/2}\sin x = 2\cos x + \sin^2 x \cdot \log_2 \sin^2 x.$$

► **2.** В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований равен 2. Найти площадь трапеции.

► **3.** Решить неравенство

$$4x + 8\sqrt{2 - x^2} > 4 + (x^2 - x)\cdot 2^x + 2^{x+1}\cdot x\sqrt{2 - x^2}.$$

► **4.** В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.

► **5.** Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2 - (x-y)^4} = y^2 - 2x^2, \\ y \geqslant 4x^4 + 4yx^2 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1974 год

Механико-математический факультет

► **1.** Решить уравнение
$$\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0.$$

► **2.** Решить неравенство
$$\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)}<\log_5(5x^2-10x+10).$$

► **3.** Вокруг треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB+AD=DE$, угол BAD равен 60° и $AE=6$. Найти площадь треугольника ABC.

► **4.** В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро DC равно 9, и $BD=AD$. Ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найти объем пирамиды.

► **5.** Найти все действительные значения α, для каждого из которых существуют четыре целых числа x, y, u, v, удовлетворяющие равенствам
$$\begin{cases} x^2+y^2=(111-\alpha)(\alpha-89), \\ 50(u^2-v^2)=\alpha(15u+5v-\alpha). \end{cases}$$

1975 год

Механико-математический факультет

▸ **1.** Решить неравенство
$$98 - 7^{x^2+5x-48} \geqslant 49^{x^2+5x-49}.$$

▸ **2.** Найти все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющих условию $x > 0$ и системе уравнений
$$\begin{cases} \sin((x-\sqrt{\pi})^2 + y^2) = 0, \\ \log_{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2\log_{2\pi} \sqrt{x^2+y^2}} = 2. \end{cases}$$

▸ **3.** Два равных равнобедренных треугольника ABC и DBE ($AB = BC = BD = BE$) имеют общую вершину B и лежат в одной плоскости так, что точки A и C находятся по разные стороны от прямой BD, а отрезки AC и DE пересекаются в точке K. Известно, что $\angle ABC = \angle DBE = \alpha < \frac{\pi}{2}$. В каком отношении прямая BK делит угол ABC?

▸ **4.** Сфера радиуса $3/8$ вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$, такой, что $\angle BAD = 60°$; высота пирамиды, равная 1, проходит через точку K пересечения диагоналей ромба. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и AD в некоторых точках M, N таких, что $MN = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, касающаяся сферы в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E. Найти длину отрезка SE.

▸ **5.** Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-0,5 < x < 1,5$, удовлетворяющие равенству
$$\log_2\left(\sin 3x - \cos 2x - \frac{3}{10}\right) = \log_2\left(\sin 7x - \cos 6x - \frac{3}{10}\right).$$

1976 год

Механико-математический факультет

► **1.** Решить уравнение
$$\log_{\sin(-x)}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)=1.$$

► **2.** Решить неравенство
$$\frac{7}{9^x-2}\geqslant\frac{2}{3^x-1}.$$

► **3.** В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, углом B равным 30° и катетом $CA=1$ проведена медиана CD. Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найти площадь треугольника CDF. Указать ее приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

► **4.** Три шара, среди которых имеются два одинаковых, касаются плоскости P и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина прямого кругового конуса принадлежит плоскости P, а ось конуса перпендикулярна этой плоскости. Все три шара лежат вне конуса, причем каждый из них касается некоторой образующей конуса. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью P, если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью один из углов равен 150°.

► **5.** Действительные числа r, s и t таковы, что $r<s<t$. Кроме того, известно, что после подстановки каждого из трех чисел r, s, t вместо y в равенство $x^2-(9-y)x+y^2-9y+15=0$ по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней получившегося квадратного уравнения. Доказать, что $-1<r<1$.

1977 год

Механико-математический факультет

1. Решить неравенство
$$x \leqslant 3 - \frac{1}{x-1}.$$

2. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции.

3. Доказать, что для функции $f(x) = \cos x \sin 2x$ справедливо неравенство
$$\min_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) > -\frac{7}{9}.$$

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases}.$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

1978 год

Механико-математический факультет

► **1.** Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это целое число.

► **2.** Найти все решения уравнения $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$, принадлежащие отрезку $[\frac{3}{4},1]$.

► **3.** В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

► **4.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \geqslant \frac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2+10xy-5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

имеет решение.

► **5.** Объем пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом $DM:MC=2:3$. Вычислить площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

1979 год

Механико-математический факультет

► **1.** Найти все решения уравнения $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geqslant 0$.

► **2.** Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через его концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q, лежащих по одну сторону от прямой KL. Найти радиус окружности, если $\angle PKL = \frac{\pi}{3}$ и точка пересечения прямых KP и QL удалена от точек P и Q на расстояние 1.

► **3.** Найти точки минимума функции $y = x^3 - 2x|x-2|$ на отрезке $[0,3]$ и ее наибольшее значение на этом отрезке.

► **4.** Решить неравенство $\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

► **5.** Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC, в котором $A = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$, $BC = 2\sqrt{2}$. Длины ребер AD, BD, CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер AD, BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

1980 год

Механико-математический факультет

► **1.** Найти все значения x, удовлетворяющие условию $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

► **2.** Найти все решения уравнения $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$.

► **3.** В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины 40° и 50°. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований равна 1.

► **4.** Касательная к графику функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=2$ будет наименьшей, и чему равна эта наименьшая площадь?

► **5.** Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3 \geqslant 0$$

имеет ровно одно решение.